# Spiel, Satz, Sieg: Der strategische Weg zur Null im Dartsport

Philipp Langgruber
Angewandte Geometrie

JOHANNES KEPLER UNIVERSITY LINZ
Altenbergerstraße 69
4040 Linz, Austria
jku.at

# Die wichtigsten Regeln

- Jeder Spieler hat drei Pfeile und somit auch drei Würfe.
- Die Spieler müssen beim Werfen 2,37 Meter vom Dart-Board entfernt sein.
- Jeder Spieler beginnt mit 301 Punkten.
- Die Spieler, versuchen den Punktestand so schnell wie möglich auf 0 zu bringen.
- Um die Punktewertung zu erhalten, reicht es aus, wenn die Dartspitze das Punktefeld berührt
- Der Spieler, der zuerst die Punkte auf 0 bringt, gewinnt ein Spiel, das im Darts „Leg“ genannt wird
- Für gewöhnlich wird ein sogenanntes „Double Out“ gespielt. Das heißt, dass der Spieler am Ende ein Doppelfeld (ein Punktefeld am äußeren Dartring) treffen muss, um ein Leg zu gewinnen.

# Die Dartboard Zahlenfolge

20, 1, 18, 4, 13, 6, 10, 15, 2, 17, 3, 19, 7, 16, 8, 11, 14, 9, 12, 5

- Brian Gamlin (1896)
- 2.432.902.008.176.640.000 Möglichkeiten ($\approx 2,43 \cdot 10^{18}$)
- Ziel: möglichst flache Verteilung
- Ansatz: Summe der $k$ aufeinanderfolgenden Punkte minimieren.
- für $k = 3$ gilt also

$$(20 + 1 + 18)^2 + (1 + 18 + 4)^2 + (18 + 4 + 13)^2 + ... + (5 + 20 + 1)^2 = 20478$$

# Problemstellung

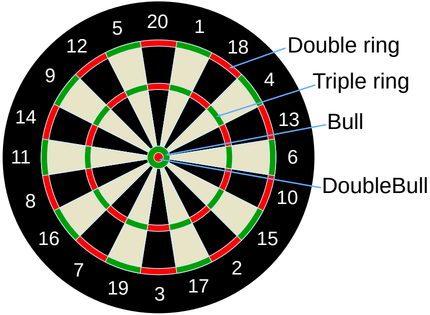
- **Modus:** Double Out
- **Ziel:** für jeden Punktestand $2 < P \leq 301$ das Ziel für den nächsten Wurfs angeben
- **Herausforderungen:** Ungenauiggkeit beim Werfen

**ToDos:**

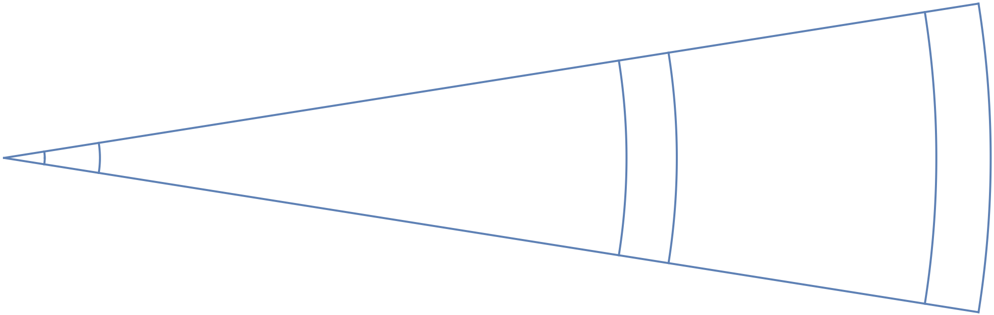
1. Darstellung des Dartboards
2. Simulation eines Wurfs
3. Bestimmen der Zielgenauigkeit
4. Zu erwartende Punkte für einzelnen Würfe berechnen
5. Erstellen einer Zielliste, beginnend bei 2 aufwärts

# Das Dartboard

- Double- und Triple-Ring (innen) 8,0mm
- Durchmesser des Doppelbull (innen) 12,7mm
- Größe des gesamten Bull (innen) 31,8mm
- Entfernung Doppeldraht - Bull (außen) 170mm
- Entfernung Tripledraht - Bull (außen) 107mm
- Entfernung Doubledraht - gegenüberliegender Doppeldraht (außen) 340mm
- Drahtdurchmesser: 1,4mm



# Arbeitsauftrag 1

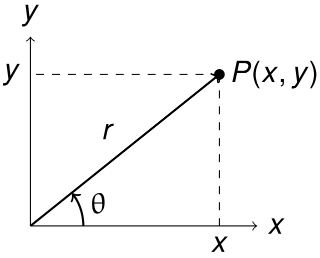


# Einführung in Polarkoordinaten

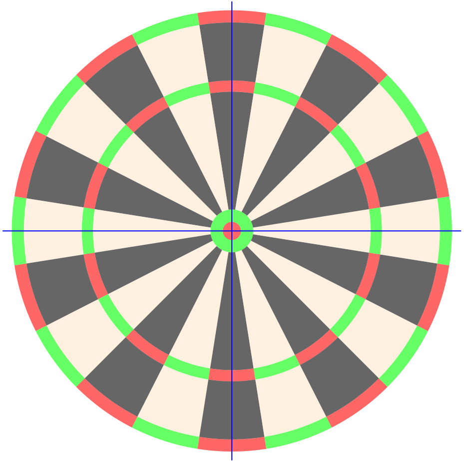
- Polarkoordinaten eines Punktes $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
  - den Abstand $r$ des Punktes vom Ursprung (*Pol*)
  - den Winkel $\theta$ zwischen der positiven $x$-Achse und der Verbindungsgeraden vom Ursprung zu $P$ (*Polarwinkel*)
- Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



# Arbeitsauftrag 2

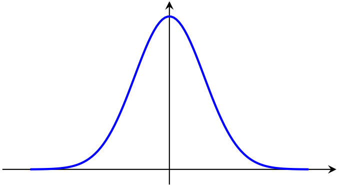


# Einführung in Normalverteilung

**Beispiel: Würfe auf eine Linie**

- Ein Spieler wirft auf eine Linie. Die Abweichung vom Zielpunkt ($x = \mu$) folgt einer Normalverteilung.
- Kleine Abweichungen sind wahrscheinlicher als große.
- Die Normalverteilung (Gauß-Verteilung) ist eine symmetrische, glockenförmige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Parameter:

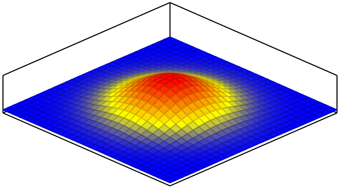
- $\mu$: Mittelwert
- $\sigma^2$: Varianz

# Einführung in Normalverteilung

**Beispiel: Würfe auf eine Zielscheibe**

- Ein Spieler wirft auf eine Zielscheibe mit Zentrum bei $(\mu_x, \mu_y)$.
- Treffer sind näher am Zentrum wahrscheinlicher als weiter entfernte.
- Die zweidimensionale Normalverteilung beschreibt Wahrscheinlichkeiten in einer Ebene:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$



Parameter:

- $\mu_x, \mu_y$: Mittelwerte in $x$- und $y$-Richtung
- $\sigma_x^2, \sigma_y^2$: Varianzen in den jeweiligen Richtungen

# Schätzen der Variant und Klassifikation

**Ziel:** Zentrum

| Zielgenauigkeit | Klassifikation | Varianz |
|---|---|---|
| (A) Exzellent | 55% treffen Bull | 13mm |
| (B) Hervorragend | 20% treffen Bull | 25mm |
| (C) Durchschnittlich | 98% innerhalb Tripple-Ring | 37mm |
| (D) Verbesserungswürdig | 92% innerhalb Tripple-Ring | 48mm |
| (E) Mangelhaft | 65% innerhalb Tripple-Ring | 75mm |

# Optimierung: Notation I

- Sektoren $n = 1, \ldots, 20$
- Segemente $y = 1, \ldots, 7$
- $P(n, y, n_t, y_t, x_t)$ Wahrscheinlichkeit das Segment $(n, y)$ zu treffen, wenn der Zielpunkt $x_t$ im Segment $(n_t, y_t)$ liegt.
- $P(n, y, n_t, y_t) = \min_{x_t \in \text{segement } y_t} P(n, y, n_t, y_t, x_t)$ kleinste Wahrscheinlichkeit das Segment $(n, y)$ zu treffen, wenn der Zielpunkt im Segment $(n_t, y_t)$ liegt.
- $P(n, y, n_t) = \min_{x_t} P(n, y, n_t, y_t, x_t)$ kleinste Wahrscheinlichkeit das Segment $(n, y)$ zu treffen, wenn der Zielpunkt im Sektor $n_t$ liegt.
- $B(s)$ ist Menge aller Segmente $(n, y)$, die bei einem Treffer bei aktuellem Punktestand $s$ zu einem Punktestand $< 0$ führen würden.

# Optimierung: Notation II

- Die Wahrscheinlichkeit *to go bust*, also zu hoch zu Punkten bei aktuellem Punktestand $s$ und dem Zielen auf $(n_t, y_t, x_t)$ ist also

$$b(s, n_t, y_t, x_t) = \sum_{(n,y) \in B(s)} P(n, y, n_t, y_t, x_t)$$

- Zielt man nun auf nur auf ein Segement, ergibt sich damit

$$b(s, n_t, y_t) = \sum_{(n,y) \in B(s)} P(n, y, n_t, y_t)$$

- Analog für einen Sektor

$$b(s, n_t) = \sum_{(n,y) \in B(s)} P(n, y, n_t)$$

# Optimierung: Notation III

- Die Wahrscheinlichkeit den Punktestand um $r$ zu senken ohne unter 0 zu kommen, also einen Sektor aus der Menge $G(r, s)$ zu treffen, beim Zielen auf $(n_t, y_t, x_t)$ ist

$$g(s, n_t, y_t, x_t) = \sum_{(n,y)\in G(r,s)} P(n, y, n_t, y_t, x_t)$$

- Zielt man nun auf nur auf ein Segement, ergibt sich damit

$$g(s, n_t, y_t) = \sum_{(n,y)\in G(r,s)} P(n, y, n_t, y_t)$$

- Analog für einen Sektor

$$g(s, n_t) = \sum_{(n,y)\in G(r,s)} P(n, y, n_t)$$

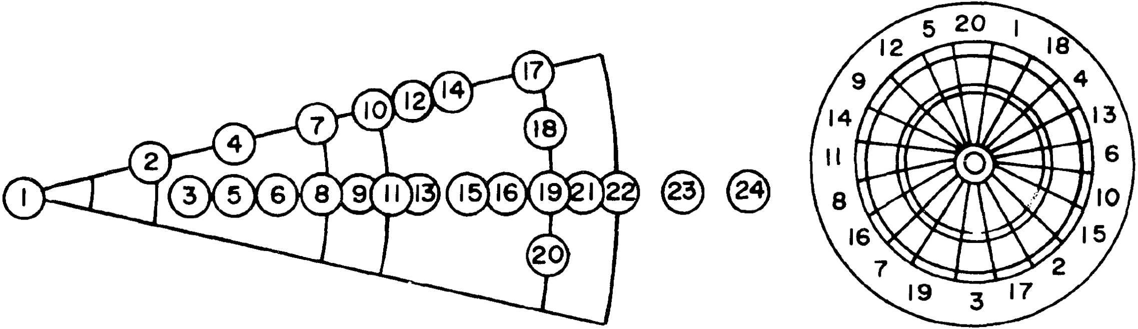
# Arbeitsauftrag 3

- $P(n, y, n_t, y_t, x_t) \qquad P(n, y, n_t, y_t) \qquad P(n, y, n_t)$
- $b(n, y, n_t, y_t, x_t) \qquad b(n, y, n_t, y_t) \qquad b(n, y, n_t)$
- $g(n, y, n_t, y_t, x_t) \qquad g(n, y, n_t, y_t) \qquad g(n, y, n_t)$

- $P(n, y, n_t, y_t, x_t) \geq P(n, y, n_t, y_t) \geq P(n, y, n_t)$
- $b(n, y, n_t, y_t, x_t) \geq b(n, y, n_t, y_t) \geq b(n, y, n_t)$
- $g(n, y, n_t, y_t, x_t) \geq g(n, y, n_t, y_t) \geq g(n, y, n_t)$

# Verschiedene Ziele

Für jeden der 20 Sektoren betrachten wir nun 24 verschiedene Zielpositionen, also in Summe 480 verschiedene Ziele.




*Optimal Strategies for the Game of Darts* - David Kohler 1982

# Monte-Carlo-Methoden: Einführung

**Idee der Monte-Carlo-Methoden:**

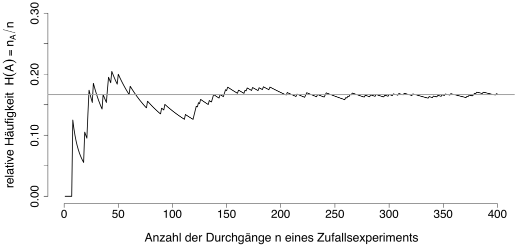
- Simulation von Zufallsprozessen zur Lösung mathematischer Probleme.
- Anwendung bei komplexen Integralen, Optimierungsproblemen, uvm.

**Beispiel: Würfe auf eine Dartscheibe**

- Ziel: Ermittlung der zu erwartenden Punktzahl für jede Zielposition.
- Vorgehen: Zufällige Wurfpositionen simulieren und Punkte mitteln.

# Gesetz der großen Zahlen - Grundlage für Monte-Carlo-Methoden.

Besagt, dass der Durchschnitt von Zufallsvariablen bei wachsender Versuchszahl gegen den Erwartungswert konvergiert.




**Schlussfolgerung:** Je größer die Stichprobe, desto besser wird approximiert.

# Wohin soll ich zielen?

Testet man nun alle 480 Ziele für die verschiedenen Zielgenauigkeiten, so ergeben sich immer unterschiedliche zu erwartende Punkte.

| Zielgenauigkeit | Ziel | zu erwartende Punkte |
|---|---|---|
| (A) Exzellent | | |
| (B) Hervorragend | | |
| (C) Durchschnittlich | | |
| (D) Verbesserungswürdig | | |
| (E) Mangelhaft | | |

Welche Formel liefert die höchsten zu erwartenden Punkte?

## Wohin soll ich zielen?

Testet man nun alle 480 Ziele für die verschiedenen Zielgenauigkeiten, so ergeben sich immer unterschiedliche zu erwartende Punkte.

| Zielgenauigkeit | Ziel | zu erwartende Punkte |
|---|---|---|
| (A) Exzellent | Sektor 20 Position 9 | 25,89 |
| (B) Hervorragend | Sektor 19 Position 11 | 16,13 |
| (C) Durchschnittlich | Sektor 7 Position 6 | 13,84 |
| (D) Verbesserungswürdig | Sektor 16 Position 5 | 13,07 |
| (E) Mangelhaft | Sektor 11 Position 2 | 11,66 |

$$\max_{x_t} \sum_{r=1}^{60} r\, g(r, \cdot, n_t, y_t, x_t)$$

# Optimierung: notwendige Runden I

Sei $f(s, t)$ die Anzahl an weiteren Runden bei einem Punktestand von $s$ vor dem aktuellen $t$-ten Wurf der Runde.

Arbeitsauftrag: Überelgen Sie sich welche Möglichkeiten es für $s = 3$ und $t = 3$ gibt und bestimmen Sie damit $f(3, 3)$.

# Optimierung: Würfe in einem Zug

Sei $f(s,t)$ die Anzahl an weiteren Runden bei einem Punktestand von $s$ vor dem aktuellen $t$-ten Wurf der Runde.

- Man erzielt mindestens 2 Punkte: $b(3, n_3, y_3, x_3)(1 + f(3, 1))$
- Man erzielt 0 Punkte: $g(0, 3, n_3, y_3, x_3)(1 + f(3, 1))$
- Man erzielt 1 Punkt: $g(1, 3, n_3, y_3, x_3)(1 + f(2, 1))$

Damit ergibt sich

$$f(3,3) = b(3, n_3, y_3, x_3)(1+f(3,1))+g(0,3,n_3,y_3,x_3)(1+f(3,1))+g(1,3,n_3,y_3,x_3)(1+f(2,1))$$

# Optimierung: notwendige Runden II

Dieses Prinzip kann man verallgemeinern und erhält:

$$f(s,3) = b(s,n_3,y_3,x_3)(1+f(s,1)) + \sum_{r\geq 0} g(r,s,n_3,y_3,x_3)(1+f(s-r,1))$$

$$f(s,2) = b(s,n_2,y_2,x_2)(1+f(s,1)) + \sum_{r\geq 0} g(r,s,n_2,y_2,x_2)f(s-r,3)$$

$$f(s,1) = b(s,n_1,y_1,x_1)(1+f(s,1)) + \sum_{r\geq 0} g(r,s,n_1,y_1,x_1)f(s-r,2)$$

Diese Gleichungen kann man nun nach $f(s,1)$ lösen und damit für $s$ beginnend bei 2 immer das beste Ziel $x_t$ bestimmen.

| P | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1-22,22,21 | 1-23,23,21 | 1-24,23,21 | 1-24,24,22 | 1-24,23,22 |
| 3 | 1-15 | 19-15 | 1-16,16,15 | 1-16,16,15 | 1-22,19,15 |
| 4 | 2-22,21,21 | 2-23,22,22 | 2-23,23,22 | 2-24,24,22 | 2-24,23,22 |
| 5 | 1-15 | 1-15 | 1-16,16, 15 | 1-16,16,15 | 1-22, 19, 15 |
| 6 | 3-22,22,21 | 3-23,22,22 | 3-23,23,22 | 3-24,24,22 | 17-24,23,22 |
| 7 | 3-15 | 3-15 | 3-16,16,15 | 20-14 | 20-22,19,15 |
| 8 | 4-21 | 4-23,22,22 | 4-23,23,22 | 4-24,24,22 | 4-24,23,22 |
| 9 | 1-15 | 1-15 | 20-11 | 20-14 | 20-22,19,15 |
| 10 | 5-22,22,21 | 5-23,22,22 | 5-23,23,22 | 5-24,24,22 | 5-24,23,22 |
| 11 | 3-15 | 3-15 | 19-11 | 19-14 | 19-22,19,15 |
| 12 | 6-22,21,21 | 6-22 | 6-23,23,22 | 6-24,24,22 | 6-24,23,22 |
| 13 | 5-15 | 5-15 | 20-11 | 12-8 | 12-11 |
| 14 | 7-22,22,21 | 10-14 | 10-14 | 10-14 | 10-19 |

*Optimal Strategies for the Game of Darts* - David Kohler 1982