

# Platonische Körper Archimedische Körper - Catalanische Körper

Agnes Seiler

Institut für Angewandte Geometrie

15.12.2017



JOHANNES KEPLER  
UNIVERSITÄT LINZ

# Definitionen

**Polygon** Ein Polygon ist ein (geschlossenes) Vieleck, das ausschließlich von geraden Linien begrenzt ist.



**Polyeder** Ein Polyeder ist ein Körper, der von Polygonen begrenzt ist.

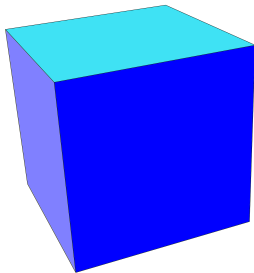


**konvex** Ein Polyeder ist konvex, wenn es die Verbindungsstrecke je zweier in ihm enthaltener Punkte auch enthält.

**regulär** Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle seine Seitenflächen zueinander kongruente, regelmäßige Vielecke sind und in jeder Ecke genau gleich viele Seiten zusammen stoßen.



## Motivation: Hexaeder / Würfel

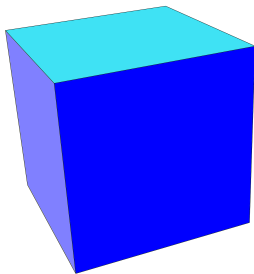


Der Würfel ist ein konvexes, reguläres Polyeder, d.h.

- alle seine Seitenflächen sind zueinander kongruente Vielecke (Quadrate) und
- in allen Ecken stoßen genau gleich viele Seitenflächen zusammen.

Gibt es weitere Körper mit diesen Eigenschaften?

## Motivation: Hexaeder / Würfel

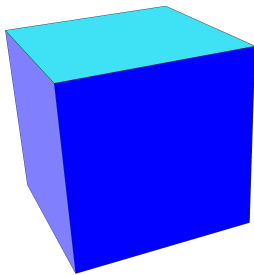


- alle seine Seitenflächen sind zueinander kongruente Vielecke (Quadrate) und
- in allen Ecken stoßen genau gleich viele Seitenflächen zusammen.

Gibt es weitere Körper mit diesen Eigenschaften?

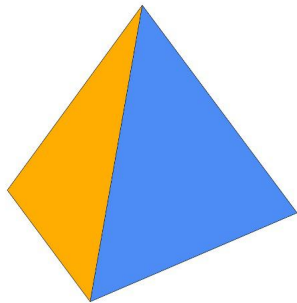
Ja, die **platonischen Körper**.

## Motivation: Hexaeder / Würfel



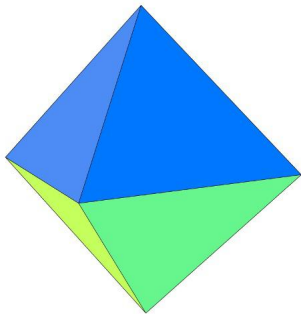
- Seitenflächen: Quadrate
- Anzahl Seitenflächen: 6
- Anzahl Ecken: 8
- Anzahl Kanten pro Ecke: 3

# Tetraeder



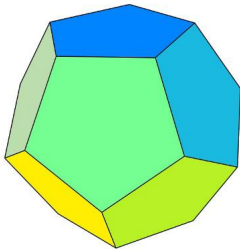
- Seitenflächen: gleichseitige Dreiecke
- Anzahl Seitenflächen: 4
- Anzahl Ecken: 4
- Anzahl Kanten pro Ecke: 3

# Oktaeder



- Seitenflächen: gleichseitige Dreiecke
- Anzahl Seitenflächen: 8
- Anzahl Ecken: 6
- Anzahl Kanten pro Ecke: 4

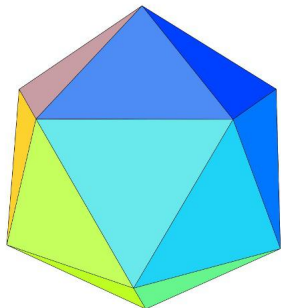
# Dodekaeder



- Seitenflächen: regelmäßige Fünfecke  
(→ Pentagondodekaeder)
- Anzahl Seitenflächen: 12
- Anzahl Ecken: 20
- Anzahl Kanten pro Ecke: 3



# Ikosaeder



- Seitenflächen: gleichseitige Dreiecke
- Anzahl Seitenflächen: 20
- Anzahl Ecken: 12
- Anzahl Kanten pro Ecke: 5

# Geschichtliches

Pythagoreer (6. Jhd. v. Chr.):

Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder

Theaitetos von Athen (4. Jhd. v. Chr.):

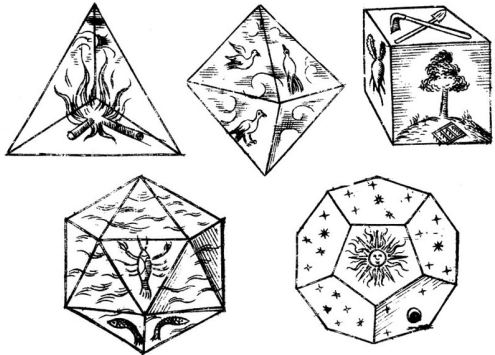
Oktaeder, Ikosaeder

Platon (*Timaios*, 360 v. Chr.):

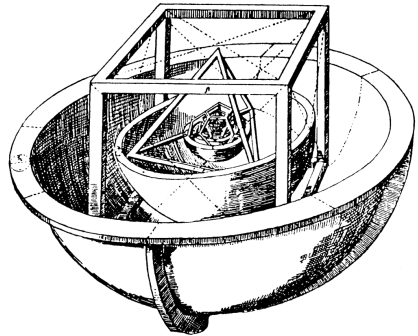
4 Elemente und Himmelsäther

Euklid (3. Jhd v. Chr.):

Beweis, dass es genau fünf  
konvexe reguläre Polyeder gibt



# Keplers Weltmodell



*Mysterium cosmographicum* (1596): Abstände der damals bekannten sechs Planeten Merkur - Saturn

## Gibt es weitere konvexe, reguläre Polyeder?

Nein.

### Satz

*Es gibt genau fünf konvexe reguläre Polyeder. Dies sind das Tetraeder, das Hexaeder, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.*

Anmerkung: "*Es gibt genau fünf...*" bedeutet, dass

- es *mindestens* fünf derartige Polyeder gibt und
- es *höchstens* fünf derartige Polyeder gibt.

## Beweis

Wir müssen die Existenz von mindestens und höchstens fünf derartigen Polyedern zeigen. Weil wir fünf derartige Polyeder (hoffentlich) gerade gebaut haben, beschränken wir uns darauf zu zeigen, dass es höchstens fünf konvexe, reguläre Polyeder gibt.

Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten, diese Aussage zu beweisen:

- Verwendung der Innenwinkelsumme
- Verwendung des Eulersches Polyedersatzes.

Beide Beweise sind äquivalent.

## Beweis (1): Innenwinkelsumme

Eine Ecke entsteht nur dann, wenn sich mindestens drei Flächen treffen. Die Summe aller Innenwinkel der angrenzenden Flächen in der Ecke muss kleiner sein als 360 Grad. → **Warum?**

## Beweis (1): Innenwinkelsumme

Eine Ecke entsteht nur dann, wenn sich mindestens drei Flächen treffen. Die Summe aller Innenwinkel der angrenzenden Flächen in der Ecke muss kleiner sein als 360 Grad. → **Warum?**

- Bei mehr als 360 Grad ist keine Eckenbildung in einem *konvexen* Polyeder mehr möglich.
- Bei genau 360 Grad liegen die benachbarten Polyeder in einer Ebene.

## Beweis (1) : Innenwinkelsumme

Aufgrund ihrer Innenwinkel (IW) sind folgende regelmäßige Polygone als Grundformen möglich:

		Innenwinkelsumme bei			
	IW	3 Flächen	4 Flächen	5 Flächen	6 Flächen
Dreieck	60	180	240	300	360
Quadrat	90	270	360	zu groß	
Fünfeck	108	324	zu groß		
Sechseck	120	360	zu groß		

Daher kann es keine weiteren konvexen, regulären Polyeder geben.



## Beweis (2): Eulerscher Polyedersatz

### Satz (Eulerscher Polyedersatz)

Für ein konvexes Polyeder mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen gilt

$$e - k + f = 2.$$

Anwendung auf unser Problem: Wir setzen

- $n$ : Anzahl der Ecken pro Seitenfläche,  $n \geq 3$
- $m$ : Anzahl der Flächen, die in einer Ecke des Polyeders zusammenstoßen,  $m \geq 3$

Die Notationen  $e$ ,  $k$  und  $f$  übernehmen wir.

## Beweis (2): Eulerscher Polyedersatz

Dann gilt

- $f \cdot n = 2 \cdot k \quad \rightarrow$  **Warum?**
- $e \cdot m = 2 \cdot k \quad \rightarrow$  **Warum?**

Daraus erhalten wir

- $f = \frac{2k}{n}$
- $e = \frac{2k}{m}$

Das setzen wir in die Eulersche Polyederformel  $e - k + f = 2$  ein:

$$\frac{2k}{m} - k + \frac{2k}{n} = 2.$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}.$$

## Beweis (2): Eulerscher Polyedersatz

Jetzt prüfen wir, für welche Paare von  $n, m \geq 3$  die Relation  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$  erfüllt ist.

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$m = 3$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Tetraeder	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ Hexaeder	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ Dodekaeder	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
$m = 4$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ Oktaeder	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$
$m = 5$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ Ikosaeder	$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$
$m = 6$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

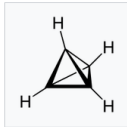
Einleitung  
Platonische Körper  
Existenz regulärer Polyeder  
Dualität  
Symmetrieeigenschaften  
Halbreguläre Polyeder

## ...außerhalb der Mathematik: Glücksspiel

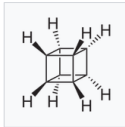


## ...außerhalb der Mathematik: Natur

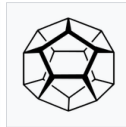
- Anordnung der Wasserstoffatome unter bestimmten Voraussetzungen - **Tetraeder**
- organische Kohlenwasserstoffmoleküle (→ platonische Kohlenwasserstoffmoleküle)



Tetrahedran



Cuban



Dodecahedran

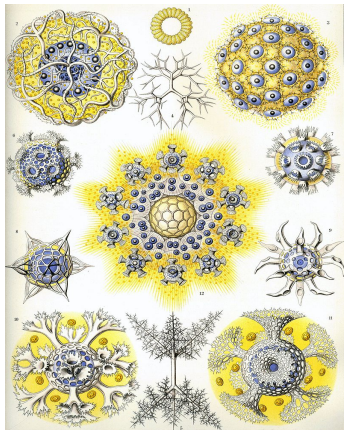
- Kristalle (Rotkupfererz, Flußspat, Magnetit) - **Tetraeder**, **Hexaeder**, **Oktaeder**
- Quasikristalle - **Dodekaeder**, **Iksaeder**
- Strukturformen von kleinen Nanoteilchen - **Iksaeder**

## ...außerhalb der Mathematik: Natur

Kalkskelette der Strahlentierchen  
(Radiolarien), einzellige Lebewesen

Vorkommen: im Meer und  
Meeresboden

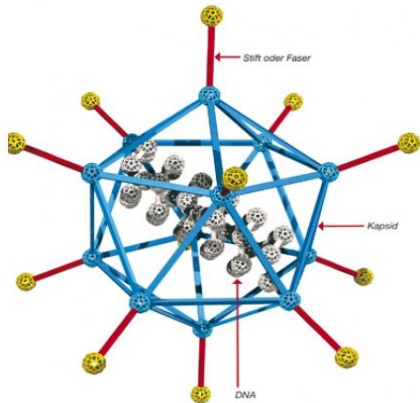
rechts: Zeichnung von Ernst Haeckel  
(1834–1919)



## ...außerhalb der Mathematik: Natur

### Proteinkapsid von Viren - Ikosaeder

Hülle aus Proteinen, die zum  
Schutz der Viren-DNS  
ausgebildet wird



## ...außerhalb der Mathematik: Management

Kanten = Mitarbeiter  
Knoten = Themen

Ein Thema wird von den  
Mitarbeitern bearbeitet,  
deren Kanten sich im  
zugehörigen Knoten  
treffen.

mit einem systematischen Lösungsansatz!  
komplexe Kommunikation beherrschbar werden lassen!



„God does not play dice!“  
Albert Einstein

das  
Ikosaeder,  
der  
komplexeste  
der fünf  
Platonischen  
Körper.....

...die Kommunikationsstruktur  
der „Syntegration®“

.....um wie viel mehr wird  
dieses Wissen wirksam, wenn sich der  
Kommunikationsprozess einer zentralen  
Ausgangsfrage widmet und dabei äußerst  
strukturiert und diszipliniert abläuft?

„Von der Methodik zum Resultat“

**SMETAN**  
engineering



# Dualität

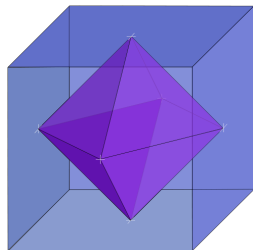
Allgemein:

Der **Dualkörper** zu einem konvexen Polyeder wird konstruiert, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen durch Kanten verbindet. Dann füllt man die Flächen, die dadurch entstehen.

# Dualität

## Allgemein:

Der **Dualkörper** zu einem konvexen Polyeder wird konstruiert, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen durch Kanten verbindet. Dann füllt man die Flächen, die dadurch entstehen.



Hexaeder und Oktaeder sind zueinander dual.

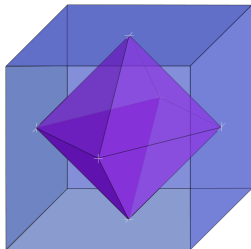
# Dualität

## Allgemein:

Der **Dualkörper** zu einem konvexen Polyeder wird konstruiert, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen durch Kanten verbindet. Dann füllt man die Flächen, die dadurch entstehen.

## Für platonische Körper:

Bildet man den Dualkörper des Dualkörpers, erhält man den (eventuell verkleinerten) Ursprungskörper.



Hexaeder und Oktaeder sind zueinander dual.

# Dualität

## Duale Paare

Hexaeder	Oktaeder
Oktaeder	Hexaeder
Tetraeder	Tetraeder
Dodekaeder	Ikosaeder
Ikosaeder	Dodekaeder

⇒ **Der Dualkörper eines platonischen Körpers ist ein platonischer Körper.**

## Weitere Eigenschaften (allgemein):

- Das duale Polyeder hat so viele Ecken wie das Ausgangspolyeder Flächen.
- Das duale Polyeder hat so viele Flächen wie das Ausgangspolyeder Ecken.
- Das duale und das Ausgangspolyeder haben gleich viele Kanten.

# Größtmögliche Symmetrie

Für platonische Körper gilt: Zu einem beliebigen Paar von Ecken (Seitenflächen, Kanten)  $a, b$  gibt es eine Abbildung, die  $a$  auf  $b$  abbildet. Das bedeutet anschaulich:

- Wenn man das Polyeder in einer Ausgangsposition fixiert und sich zwei Ecken (Seitenflächen, Kanten)  $a$  und  $b$  merkt,
- dann kann man den Körper auf eine bestimmte Art drehen, sodass
  - $a$  jetzt dort liegt, wo vorher  $b$  lag
  - und man die neue Position des Körpers nicht von der Ausgangsposition unterscheiden kann.

Das heißt Flächen, Kanten und Ecken eines platonischen Körpers sind *ununterscheidbar*.

# Abschwächung der größtmöglichen Symmetrie

Was passiert, wenn

- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Flächen und Kanten verzichten?

# Abschwächung der größtmöglichen Symmetrie

Was passiert, wenn

- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Flächen und Kanten verzichten?
    - verschiedene (gleichmäßige) Polygone als Seitenflächen möglich
    - Ecken nach wie vor ununterscheidbar → *Uniformität der Ecken*
- **Archimedische Körper**

# Abschwächung der größtmöglichen Symmetrie

Was passiert, wenn

- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Flächen und Kanten verzichten?
  - verschiedene (gleichmäßige) Polygone als Seitenflächen möglich
  - Ecken nach wie vor ununterscheidbar → *Uniformität der Ecken*  
→ **Archimedische Körper**
- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Ecken und Kanten verzichten?



# Abschwächung der größtmöglichen Symmetrie

Was passiert, wenn

- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Flächen und Kanten verzichten?
  - verschiedene (gleichmäßige) Polygone als Seitenflächen möglich
  - Ecken nach wie vor ununterscheidbar → *Uniformität der Ecken*  
→ **Archimedische Körper**
- wir auf die Ununterscheidbarkeit der Ecken und Kanten verzichten?
  - unterschiedlich viele kongruente Seitenflächen stoßen in einer Ecke zusammen
  - Flächen nach wie vor ununterscheidbar → *Uniformität der Flächen*  
→ **Catalanische Körper**

→ **Halbreguläre Polyeder**

# Archimedische Körper

Archimedes, 287 - 212 v. Chr., hat die halbregulären Polyeder als erster untersucht.

## Definition

Ein konvexes Polyeder, dessen Flächen verschiedene regelmäßige Polygone sind und dessen Ecken uniform sind, heißt *archimedischer Körper*.

Beispiel: Fußball

- 12 Fünf- und 20 Sechsecke
- In jeder Ecke stoßen zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammen.

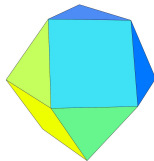
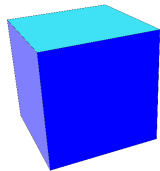


# Wie erzeugt man einen archimedischen Körper?

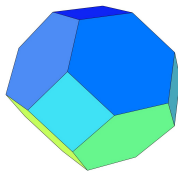
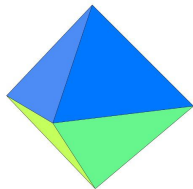
## Abstumpfung

- Wenn man bei einem platonischen Körper die **Ecken** so **abschneidet**, dass die Schnittflächen regelmäßige Polygone ergeben und die restlichen Seitenflächen ebenfalls regelmäßige Polygone bilden, erzeugt man einen archimedischen Körper.
- Alle 13 archimedischen Körper können auf diese Weise erzeugt werden.
- Wenn ein archimedischer Körper durch Abstumpfen aus einem platonischen Körper erzeugt werden kann, dann kann er auch aus dem dazu dualen platonischen Körper durch Abstumpfen erzeugt werden.

# Abstumpfung



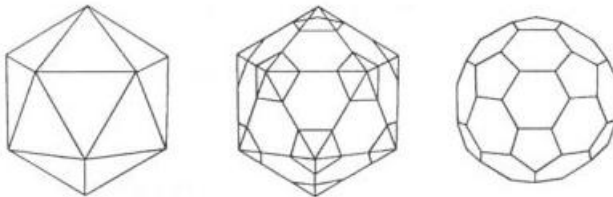
Würfel, abgestumpfter Würfel und Kuboktaeder



Oktaeder und Oktaederstumpf

# Wie erzeugt man einen Fußball?

Ein Fußball entspricht einem abgestumpften Ikosaeder.

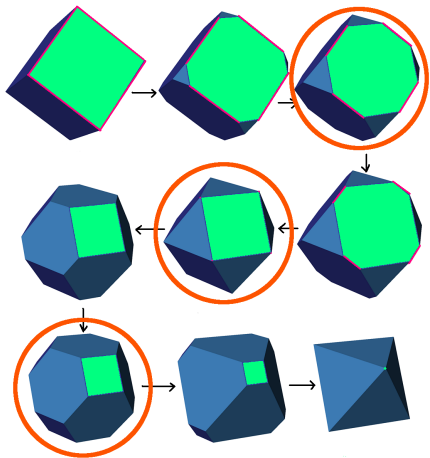


Wie kann man die Anzahl der Fünf- und Sechsecke bestimmen?

## Anzahl der Fünf- und Sechsecke

- Die Sechsecke sind die zurechtgeschnittenen Ursprungsflächen, also gibt es 20 von ihnen.
- Die Fünfecke entstehen aus den Ecken des Ikosaeders.  
→ Wie viele Ecken hat ein Ikosaeder?
  - Die 20 Dreiecke haben zusammen 60 Ecken.
  - In dieser Zählweise wird jede Ecke fünffach gezählt, weil in einer Ecke des Ikosaeders fünf Dreiecksecken zusammenstoßen.
  - Daher hat ein Ikosaeder  $\frac{60}{5} = 12$  Ecken und der Fußball enthält somit 12 Fünfecke.

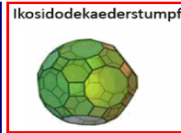
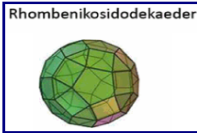
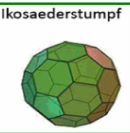
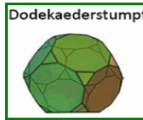
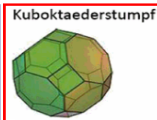
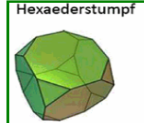
Wie kann man die verschiedenen Seitenflächen zählen, wenn man nicht weiß, durch welchen platonischen Körper der gegebene Körper erzeugt wurde?



Erinnerung: Wenn man einen archimedischen Körper aus einem platonischen Körper erzeugen kann, dann kann man ihn auch aus dem dualen platonischen Körper erzeugen.

Die Transformation  
Würfel  $\rightarrow$  Kuboktaeder  
 $\rightarrow$  Oktaeder kann man  
auch rückwärts lesen.

# Übersicht über die archimedischen Körper





## Abschließende Bemerkungen

Für die vorige Abbildung gilt:

- **Grüne Box:** Erzeugung durch "einfaches" Abstumpfen der Ecken des Ursprungskörpers
- **Rote Box:** Nach dem Abschneiden der Ecken entstehen Rechtecke, die noch zu Quadraten skaliert werden müssen
- **Blaue Box:** Entstehen, indem man im ersten Schritt die Kanten des Ursprungskörpers abflacht
- **Gelbe Box:** Entstehen durch Drehen und Verkleinern einer Seitenfläche des Ursprungskörpers. Entstehende Zwischenräume werden mit Dreiecken gefüllt.

## Abschließende Bemerkungen

Offene Fragen:

- Warum gibt es keine archimedischen Körper mit mehr als drei verschiedenen Seitenflächen?
- Gibt es keine anderen Körper, deren Seitenflächen gleichmäßige Vielecke und deren Ecken kongruent sind?

## Abschließende Bemerkungen

Offene Fragen:

- Warum gibt es keine archimedischen Körper mit mehr als drei verschiedenen Seitenflächen?  
→ Innenwinkelsumme
- Gibt es keine anderen Körper, deren Seitenflächen gleichmäßige Vielecke und deren Ecken kongruent sind?  
→ Prismen und Antiprismen

## Und wann kommen endlich die catalanischen Körper?

Erinnerung:

- Archimedische Körper  $\rightarrow$  Uniformität der Ecken
- Catalanische Körper  $\rightarrow$  Uniformität der Flächen

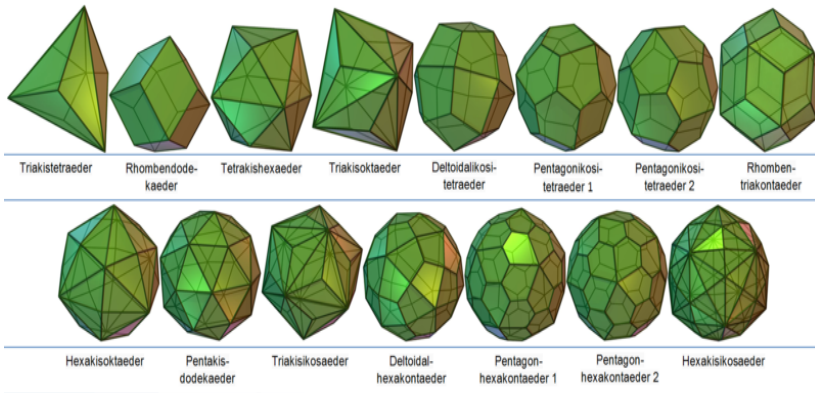
Die catalanischen Körper sind die dualen Polyeder zu den archimedischen Körpern.

Eugène Charles Catalan, 1814 - 1894, Belgien

Eigenschaften:

- Die Seitenflächen der catalanischen Körper sind nicht regelmäßige Vielecke.
- Es gibt verschiedene Arten von Ecken, d.h. es stoßen unterschiedlich viele Seitenflächen in verschiedenen Ecken zusammen.

# Übersicht über die catalanischen Körper



## Zusammenfassung

Wir haben **platonische Körper** untersucht und gezeigt, dass es keine weiteren konvexen, regulären Polyeder gibt. Wir haben das Konzept der **Dualität** kennen gelernt. In diesem Zusammenhang haben wir festgestellt, dass der duale Körper eines platonischen Körpers wieder ein platonischer Körper ist.

Wir haben aus den platonischen die **archimedischen Körper** hergeleitet und genauer untersucht. Die Dualität konnten wir nutzen, um so die **catalanischen Körper** zu erzeugen. Sowohl mit Hilfe der Dualität als auch durch Untersuchen des **Abstumpfungsvorgangs** konnten wir Aussagen über so erzeugte Körper treffen.