Zwillinge: direkte und inverse Probleme

Zu vielen Fragen gibt es eine *Umkehrfrage.* Manche Probleme treten paarweise auf - in einer direkten und in einer dazu umgekehrten, *inversen* Form.

Beispiel: Wer multiplizieren kann, kann quadrieren. Das *direkte* Problem besteht darin, zu einer gegeben Zahl x ihr Quadrat y zu bilden, also $y = x^2$.
Das dazu inverse Problem lautet: Gegeben ist eine Zahl y. Man finde eine Zahl x, deren Quadrat gleich y ist. Anders gesagt: Man soll aus y die Wurzel ziehen.

Bei diesem Beispiel ist das inverse Problem *schwieriger* als das direkte. Das sieht man daran, dass das direkte Problem *immer* in den natürlichen Zahlen, also $1, 2, 3, \ldots$ ausführbar ist. Hingegegen ist die (positive) Wurzel aus einer natürlichen Zahl nur im Ausnahmefall wieder eine natürliche Zahl (z.B. $\sqrt{3}$). Damit dieses inverse Problem immer lösbar ist, muss man die reellen Zahlen einführen.

In der Mathematik begegnen wir einem solchen Zwillingsproblem häufig. Immer wenn eine *Operation*

$$K$$

gegeben ist, die aus einer Größe x eine „neue" Größe y „macht", so dass also

$$y = Kx$$

gilt, kann man die zugehörige *Umkehrfrage* stellen: Gegeben ist y, man finde x, so dass die Gleichung

$$y = Kx$$

erfüllt ist.

Hier repräsentiert x die Ursache, y die Wirkung und K vermittelt den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung (Ursache-Wirkungs-Beziehung). Das *inverse Problem* besteht darin, aus der Wirkung auf die Ursache zurückzuschließen.

Beispiel: Wie tief ist der Brunnen?

Inverse Probleme entstehen in der Praxis aus der Aufgabe, eine Größe ermitteln zu müssen, die sich nicht unmittelbar, nicht direkt bestimmen lässt. Die Frage nach der Tiefe eines Brunnens ist eine solche Aufgabe.

Ausgangspunkt ist folgende Fragestellung: Wenn du einen Gegenstand, zum Beispiel einen Stein, in den Brunnen wirfst, hörst du nach einer gewissen Zeit den Aufprall.

Dieses Phänomen beruft auf folgender Ursache-Wirkungs-Beziehung:

a) Wenn ein Gegenstand losgelassen wird, fällt er zu Boden.

b) Durch den Aufprall des Gegenstandes am Boden entsteht ein Geräusch, das sich in der Luft fortpflanzt.

Man erwartet, dass zwischen der Tiefe H des Brunnens und der Wartezeit T, die zwischen dem Loslassen des Steins und dem Hören des Aufschlags vergeht, ein Zusammenhang besteht.

Wir möchten nun ein mathematisches Modell für diesen Zusammenhang finden. Dazu benötigen wir folgende Überlegungen:

a) Galilei hat vor etwa 400 Jahren den sogenannten *freien Fall* eines Gegenstandes auf der Erdoberfläche untersucht und gefunden, dass zwischen Fallzeit t_1 und durchfallener Höhe s_1 bei Vernachlässigung der Bremswirkung durch die Luft die Beziehung

$$s_1 = 5t_1^2$$

besteht. Dabei wird die Zeit in Sekunden und der Weg in Metern gemesen.

b) Für die Ausbreitung eines Geräusches in der Luft gilt unter gewissen Bedingungen

$$s_2 = 340t_2.$$

Dabei ist s_2 der zurückgelegte Weg und t_2 die dafür benötigte Zeit.

Legt man diese beiden Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu Grunde, folgt für den Zusammenhang zwischen Tiefe H des Brunnens und Wartezeit T die Formel

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{1}{5}H} + \frac{1}{340}H.$$

$\sqrt{\frac{1}{5}H}$ ist die Zeit, die der Gegenstand braucht, bis er am Boden aufschlägt. $\frac{1}{340}H$ ist die Zeit, die verstreicht, bis das durch den Aufschlag erzeugte Geräusch das Ohr des Experimentators oben erreicht.

Um die Gleichung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass für die Ausbreitung des Geräusches genau eine Sekunde benötigt wird, d.h. $t_2 = 1$. Es gilt also

$$T = \sqrt{\frac{1}{5}H} + 1. \tag{1}$$

Mit der oben genannten Formel kann man nun folgendes berechnen:

- Wenn die Tiefe H bekannt ist, liefert sie eine Prognose für die Wartezeit T. Das ist die Lösung des *direkten Problems.*
- Wenn die Tiefe H nicht bekannt ist, dafür aber die Wartezeit T, kann eine Prognose für H gewonnen werden. Dazu ist Gleichung (1) nach H aufzulösen. Das Resultat lautet:

  $$H = 5(T - 1)^2.$$

  Das ist die Lösung des *inversen Problems.*